WISKUNDE B · OKTOBER · VOOR DE BEGELEIDER

Functies combineren en samenstellen

Antwoorden en toelichting bij de tien opgaven onder *Zelf proberen*. Elke uitwerking staat in losse stappen, met per stap de regel die je gebruikt — zo kun je precies zien waar hij afhaakt, in plaats van alleen of het antwoord goed is. Elke stap is nagerekend met een computeralgebrasysteem (sympy). Per opgave staat erbij wat de opgave toetst, wat je kunt doorvragen en waar het meestal fout gaat. De aparte examenvraag onder de tien opgaven valt buiten dit blad.

Hoe je dit gebruikt. Laat hem eerst zelf schrijven. Klopt het antwoord maar is de weg onduidelijk, gebruik dan de doorvraag: die is zo gekozen dat het goede antwoord niet te raden is. Loopt hij vast, leg de stappen dan niet voor, maar vraag welk stapnummer hij nog wél zelf kan zetten — dat lokaliseert het gat. De kolom “waar het misgaat” is geen voorspelling over hem, maar de fout die bij deze opgave het vaakst voorkomt.

Samenstellen herkennen en ontleden

1. Gegeven f(g(x)) = √(2x + 6). Geef een passende f of g in drie gevallen.

a. f(x) = √x · b. g(x) = 2x + 6 · c. f(x) = √(2x)

STAP VOOR STAP

1. Kijk eerst van buiten naar binnen. Er wordt iets uitgerekend en daar gaat een wortel over. De buitenkant is dus de wortel, de binnenkant is wat eronder staat.
2. a. Gegeven is g(x) = 2x + 6. Wat er bij f binnenkomt is dan al 2x + 6, dus f hoeft alleen nog de wortel te nemen.

   $f(x) = \sqrt{x}$
3. b. Gegeven is f(x) = √x. De wortel is al geregeld, dus g moet precies alles opleveren wat onder het wortelteken moet komen.

   $g(x) = 2x + 6$
4. c. Nu is g(x) = x + 3 gegeven. Dat is kleiner dan 2x + 6, dus de binnenkant doet minder — en dan moet de buitenkant meer doen.
5. Schrijf het gevraagde om in termen van wat er binnenkomt. Haal de 2 buiten de haakjes: onder de wortel staat dus twee keer wat er binnenkomt.

   $2x + 6 = 2(x + 3)$
6. Dus moet f zijn invoer eerst verdubbelen en dan de wortel nemen.

   $f(x) = \sqrt{(2x)}$
7. Controle: vul g in f in en kijk of je terugkomt bij de opgave.

   $f(g(x)) = f(x + 3) = \sqrt{(2(x + 3))} = \sqrt{(2x + 6)}$

Wat het toetst: dat een samenstelling op meer dan één manier te ontleden is. Bij a en b is de ene helft gegeven en volgt de andere direct. Bij c is de binnenkant kleiner gemaakt, dus moet de buitenkant meer doen.

Over de notatie: de x in f(x) is een plaatsvervanger — hij zegt alleen “wat er binnenkomt”. Dat is dezelfde x als in g(x), maar in een andere rol. Struikelt hij daarover, laat hem dan

f(blokje) = √blokje schrijven en daarna het blokje vullen; dat is wiskundig hetzelfde.

Doorvraag: “Kun je er nog een derde ontleding bij verzinnen?” Bijvoorbeeld g(x) = x en f(x) = √(2x + 6) — triviaal, maar geldig. Dat maakt het punt scherp: de ontleding is een keuze, geen eigenschap van de functie.

Waar het misgaat: bij c de 2 vergeten en f(x) = √(x + 3) opschrijven. Laat hem dan stap 7 zelf doen: f(g(x)) zou √((x + 3) + 3) = √(x + 6) worden, en dat is niet wat er stond.

---

2. f(x) = √(x + 2) en g(x) = √(4 − x). Geef het domein van f + g, f · g en f / g.

f + g en f · g: $-2 \leq x \leq 4$ · f / g: $-2 \leq x < 4$

STAP VOOR STAP

1. Domein van f apart. Onder een wortel mag niets negatiefs staan, dus wat eronder staat moet ≥ 0 zijn.

   $x + 2 \geq 0 \rightarrow x \geq -2$

2. Domein van g apart, op dezelfde manier. Let op het omklappen: je deelt door −1, en dan draait het ongelijkteken om.

   $4 - x \geq 0 \rightarrow -x \geq -4 \rightarrow x \leq 4$

3. f + g bestaat alleen waar f én g bestaan. Dat is de overlap van de twee stukken, niet de twee stukken bij elkaar.

   $-2 \leq x \leq 4$

4. f · g geeft precies hetzelfde. Vermenigvuldigen stelt geen extra eis: zijn beide getallen er, dan is het product er ook.

   $-2 \leq x \leq 4$

5. f / g begint met dezelfde overlap, maar delen stelt wél een extra eis: de noemer mag niet nul zijn. Dus zoek de nulpunten van g binnen die overlap.

6. g(x) = 0 oplossen. Een wortel is nul als wat eronder staat nul is.

   $\sqrt{(4 - x)} = 0 \rightarrow 4 - x = 0 \rightarrow x = 4$

7. x = 4 valt er dus af. De linkerkant blijft heel, want g is daar niet nul.

   $-2 \leq x < 4$

Wat het toetst: dat combineren het domein verkleint. Een combinatie bestaat alleen op de overlap, en bij delen valt daarnaast elk nulpunt van de noemer af.

Doorvraag: “Kan het domein van f + g ooit groter zijn dan dat van f alleen?” Nee, nooit. Dat is de hele regel in één zin.

Waar het misgaat: bij stap 3 de vereniging nemen in plaats van de overlap, dus “x ≥ −2 of x ≤ 4” — wat alle x zou betekenen. Of stap 6 overslaan en bij f / g hetzelfde antwoord geven als bij f + g.

---

3. f(x) = 1/√x en g(x) = x² − 4. Bepaal f(g(x)) en het exacte domein.

f(g(x)) = 1 / √(x² − 4) · domein: $x < -2$ of $x > 2$

STAP VOOR STAP

1. Invullen: waar in de formule van f een x staat, komt g(x) te staan.
   $f(g(x)) = 1 / \sqrt{(x^2 - 4)}$
2. Eerste eis, van de wortel: wat onder het wortelteken staat mag niet negatief zijn.
   $x^2 - 4 \geq 0$
3. Tweede eis, van de breuk: de noemer mag niet nul zijn. De noemer is de wortel zelf, en die is nul als wat eronder staat nul is.
   $x^2 - 4 \neq 0$
4. De twee eisen samen. Groter dan of gelijk aan nul, maar niet gelijk aan nul, is gewoon groter dan nul. Het gelijkteken valt dus weg.
   $x^2 - 4 > 0$
5. Ontbinden, zodat je de nulpunten ziet. Dat zijn de enige plekken waar het teken kan omslaan.
   $(x - 2)(x + 2) > 0 \rightarrow \text{nulpunten } x = -2 \text{ en } x = 2$
6. Die twee nulpunten knippen de getallenlijn in drie stukken. Per stuk is één proefgetal genoeg, want tussen de nulpunten blijft het teken hetzelfde.
7. Proefgetallen invullen in $x^2 - 4$.
   $x = -3 \rightarrow 5 > 0, \text{ mag } \cdot\ x = 0 \rightarrow -4 < 0, \text{ mag niet } \cdot\ x = 3 \rightarrow 5 > 0, \text{ mag}$
8. Dus de buitenste twee stukken, zonder de randen.
   $\text{domein: } x < -2 \text{ of } x > 2$

Wat het toetst: twee eisen tegelijk zien en ze samenvoegen. Stap 4 is het hele punt van de opgave: zonder de breuk zou er ≥ staan, mét de breuk staat er >.

Doorvraag: “En als f(x) = √x was geweest, zonder breuk?” Dan mag het gelijkteken wel mee: x ≤ −2 of x ≥ 2. Hier zie je precies wat het streepje van de breuk doet.

Waar het misgaat: bij stap 5 uit $x^2 > 4$ de conclusie x > 2 trekken en de negatieve tak vergeten. Laat hem dan stap 7 doen met x = −3: dat werkt, dus de helft van het antwoord ontbrak.

4. Schrijf h(x) = √((x − 1)/(x + 1)) als samenstelling en bepaal het exacte domein.

g(x) = (x − 1)/(x + 1), f(x) = √x · domein: x < −1 of x ≥ 1

STAP VOOR STAP

1. Ontleden. Er staat een wortel om een breuk heen: de breuk is de binnenkant, de wortel de buitenkant.
   $g(x) = (x - 1)/(x + 1), f(x) = \sqrt{x}, \text{ dus } h(x) = f(g(x))$
2. Eerste eis, van de wortel: wat eronder staat mag niet negatief zijn.
   $(x - 1)/(x + 1) \geq 0$

3. Tweede eis, van de breuk zelf: de noemer mag niet nul zijn.

   $x + 1 \neq 0$, dus $x \neq -1$

4. Waarom je nu niet kruislings mag vermenigvuldigen. Om van de eis naar $x - 1 \geq 0$ te gaan moet je beide kanten met $x + 1$ vermenigvuldigen. Maar je weet niet of $x + 1$ positief of negatief is, en bij negatief klapt het $\geq$-teken om. Die stap mag dus niet — daarom een tekenschema.

5. Teken van een breuk. Delen werkt met tekens als vermenigvuldigen: plus door plus is plus, min door min is plus, en gemengd geeft min. Niet-negatief betekent dus: teller en noemer hetzelfde teken.

   $(+)/(+) = + \cdot (-)/(-) = + \cdot (+)/(-) = - \cdot (-)/(+) = -$

6. De grenspunten zoeken. Een breuk kan maar op twee soorten plekken van teken omslaan: waar hij nul wordt (teller nul) en waar hij niet bestaat (noemer nul). Nergens anders.

   teller: $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$ · noemer: $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

7. Die twee punten knippen de getallenlijn in drie stukken. Binnen een stuk blijft het teken hetzelfde, dus één proefgetal per stuk is genoeg.

interval	teller $x - 1$	noemer $x + 1$	breuk
$x < -1$	negatief	negatief	positief
$-1 < x < 1$	negatief	positief	negatief
$x > 1$	positief	positief	positief

STAP VOOR STAP (VERVOLG)

8. Proefgetallen erbij, om het schema te controleren.

   $x = -2 \rightarrow (-3)/(-1) = 3$, positief · $x = 0 \rightarrow (-1)/(1) = -1$, negatief · $x = 2 \rightarrow (1)/(3) = \frac{1}{3}$, positief

9. De randen apart nagaan. Bij $x = 1$ is de breuk precies 0, en de wortel van 0 bestaat. Dus hoort 1 er wél bij — vandaar $\geq$ en niet $>$.

   $x = 1$: $0/2 = 0$ en $\sqrt{0} = 0$

10. Bij $x = -1$ valt het erbuiten, en niet om het teken maar omdat de breuk daar niet bestaat. Dat is een andere reden dan bij alle andere punten.

    $x = -1$: deling door 0

11. Alles bij elkaar.

    domein: $x < -1$ of $x \geq 1$

Wat het toetst: een tekenschema opzetten en de twee soorten grenspunten uit elkaar houden. Het nulpunt mag meedoen, het breekpunt niet.

Doorvraag: “Waarom staat er bij $x = 1$ een gelijkteken en bij $x = -1$ niet?” Twee verschillende oorzaken: de één is een nulpunt dat mag, de ander een verboden deling.

Tweede doorvraag, als stap 4 niet landt: “Vermenigvuldig links en rechts eens met $x + 1$ en vul daarna $x = -2$ in.” Hij vindt dan $x \geq 1$, maar $x = -2$ blijkt tóch te werken. Dat is het bewijs dat die stap niet mocht.

Waar het misgaat: precies stap 4 overslaan — teller en noemer los nul stellen en dan $x \geq 1$ opschrijven, waarmee het hele linkerinterval verdwijnt. Of bij stap 10 $x = -1$ toch meenemen omdat het teken daar klopt.

Gebroken functies, asymptoten en de inverse

5. f(x) = (x + 1)/(x − 2) en g(x) = 1/x. Bepaal f(g(x)), vereenvoudig, geef de verticale asymptoot en het exacte domein.

f(g(x)) = (1 + x)/(1 − 2x) · asymptoot x = ½ · domein: x ≠ 0 en x ≠ ½

STAP VOOR STAP

1. Invullen: waar in f een x staat, komt 1/x. Er komt nu een breuk in een breuk te staan; dat is geen fout, dat werk je straks weg.

   $f(g(x)) = (1/x + 1) / (1/x - 2)$

2. De teller op één noemer brengen. Schrijf de 1 als x/x, dan kun je optellen.

   $1/x + 1 = 1/x + x/x = (1 + x)/x$

3. De noemer op dezelfde manier. Schrijf de 2 als 2x/x.

   $1/x - 2 = 1/x - 2x/x = (1 - 2x)/x$

4. Nu staat er een breuk gedeeld door een breuk. Delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde.

   $(1 + x)/x \div (1 - 2x)/x = (1 + x)/x \cdot x/(1 - 2x)$

5. De x boven en onder valt weg.

   $f(g(x)) = (1 + x)/(1 - 2x)$

6. Verticale asymptoot: daar waar de noemer van het eindresultaat nul wordt.

   $1 - 2x = 0 \rightarrow x = ½$

7. Domein, eerste eis: g moet bestaan. g(x) = 1/x bestaat niet bij x = 0.

   $x \neq 0$

8. Domein, tweede eis: f deelt door x − 2, dus wat er bíj f binnenkomt mag geen 2 zijn. Wat er binnenkomt is g(x), dus los op g(x) = 2.

   $1/x = 2 \rightarrow x = ½$, dus $x \neq ½$

9. Samen.

   domein: $x \neq 0$ en $x \neq ½$

Dit is de kernopgave van de set. Vul x = 0 in in het eindantwoord uit stap 5: (1 + 0)/(1 − 0) = 1, netjes gedefinieerd. Tóch mag x = 0 niet, want g(0) = 1/0 bestaat niet. Het vereenvoudigen in stap 5 heeft het gat dichtgesmeerd. Daarom komt het domein uit de functies waarmee je begint (stap 7 en 8), niet uit de vorm waarmee je eindigt. Vereenvoudigen mag het domein nooit vergroten.

Doorvraag: “Vul x = 0 in in je eindantwoord. Mag dat?” Zegt hij ja, vraag dan wat g(0) is. Dat is het moment waarop het kwartje valt.

Waar het misgaat: stap 7 overslaan en alleen $x \neq ½$ opschrijven. Dit kost op een examen een punt, en het is de meest weggegeven punt bij gebroken samenstellingen. Ook komt voor: bij stap 2 de 1 vergeten om te schrijven en $1/x + 1 = 2/x$ maken.

6. f(x) = (x + 3)/(x − 1). Bereken f(f(x)), vereenvoudig, en leg uit wat de uitkomst betekent.

f(f(x)) = x · f is zijn eigen inverse · domein: x ≠ 1

STAP VOOR STAP

1. Schrijf eerst op wat er staat: in de formule van f komt overal f(x) te staan in plaats van x.
   $f(f(x)) = (f(x) + 3) / (f(x) - 1)$, met $f(x) = (x + 3)/(x - 1)$
2. De teller apart uitwerken. Schrijf de 3 als $3(x - 1)/(x - 1)$, dan staat alles op dezelfde noemer.
   $(x + 3)/(x - 1) + 3 = (x + 3)/(x - 1) + 3(x - 1)/(x - 1)$
3. Tellers optellen en vereenvoudigen: $x + 3 + 3x - 3 = 4x$.
   $\text{teller} = (x + 3 + 3x - 3)/(x - 1) = 4x/(x - 1)$
4. De noemer apart uitwerken, op dezelfde manier. Let op het minteken vóór de hele haak: $-(x - 1)$ wordt $-x + 1$.
   $\text{noemer} = (x + 3 - (x - 1))/(x - 1) = (x + 3 - x + 1)/(x - 1) = 4/(x - 1)$
5. Nu de twee delen. Delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde.
   $4x/(x - 1) \div 4/(x - 1) = 4x/(x - 1) \cdot (x - 1)/4$
6. De $(x - 1)$ valt weg en $4/4 = 1$.
   $f(f(x)) = x$
7. Domein, eerste eis: de eerste keer f toepassen lukt niet bij $x = 1$.
   $x \neq 1$
8. Domein, tweede eis: wat er de twééde keer bij f binnenkomt mag ook geen 1 zijn. Dus ga na of $f(x) = 1$ kan.
   $(x + 3)/(x - 1) = 1 \rightarrow x + 3 = x - 1 \rightarrow 3 = -1$
9. Dat is onmogelijk, dus er valt niets extra af. Dát je het nagaat is het punt, niet dat er iets uitkomt.
   $\text{domein: } x \neq 1$
10. Betekenis: twee keer f toepassen brengt je terug bij x. f draait zichzelf dus terug — f is zijn eigen inverse. Dat is precies de brug naar de volgende les.

Wat het toetst: rekenen met een breuk in een breuk, en het inzicht dat $f(f(x)) = x$ betekent dat f zichzelf terugdraait.

Doorvraag: “Je past f twee keer toe en komt uit op x. Wat is dan de inverse van f?” Antwoord: f zelf. Daarna: “ken je nog zo'n functie?” — $f(x) = 1/x$, of $f(x) = -x$.

Waar het misgaat: bij stap 4 het minteken voor de haak vergeten en $x + 3 - x - 1 = 2$ krijgen. Of teller en noemer apart vereenvoudigen en de $(x - 1)$ te vroeg wegstrepen. Of bij stap 7 concluderen dat het domein alle x is, omdat er x uitkomt.

Voor alle x, of voor welke x?

Opgave 7 en 8 horen bij elkaar. De formules lijken op elkaar, de vraag is wezenlijk anders. Bij 7 moet de gelijkheid voor *alle* x gelden: dan vergelijk je coëfficiënten en zoek je de parameter. Bij 8 staat de functie vast en zoek je de x. Bespreek ze achter elkaar; het verschil is het leerdoel.

7. $f(x) = x^2$ en $g(x) = x + a$. Voor welke a geldt $f(g(x)) = g(f(x))$ voor alle x?

a = 0

STAP VOOR STAP

1. $f(g(x))$: wat binnenkomt is $x + a$, en f kwadrateert dat.

   $f(g(x)) = (x + a)^2$

2. Uitwerken met het merkwaardige product. Het dubbele product niet vergeten: $2 \cdot x \cdot a = 2ax$.

   $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

3. $g(f(x))$: nu komt x^2 binnen, en g telt er a bij op.

   $g(f(x)) = x^2 + a$

4. “Voor alle x” betekent dat links en rechts dezelfde functie moeten zijn — niet dat er één x is waar het klopt. Twee veeltermen zijn voor alle x gelijk precies als ze per macht van x dezelfde coëfficiënt hebben. Dus leg de termen naast elkaar.

term	links	rechts	eis
x^2	1	1	klopt altijd
x	2a	0	a = 0
constant	a^2	a	a = 0 of a = 1

STAP VOOR STAP (VERVOLG)

5. De x-term geeft één eis.

   $2a = 0 \rightarrow a = 0$

6. De constante term geeft een tweede eis. Breng alles naar één kant en ontbind; deel niet door a, want a mag nul zijn.

   $a^2 = a \rightarrow a^2 - a = 0 \rightarrow a(a - 1) = 0 \rightarrow a = 0$ of $a = 1$

7. Beide eisen moeten tegelijk gelden. Alleen $a = 0$ staat in beide rijtjes.

   $a = 0$

8. Controle: vul $a = 0$ in aan beide kanten.

   links $(x + 0)^2 = x^2$, rechts $x^2 + 0 = x^2$

9. Waarom $a = 1$ afvalt: één tegenvoorbeeld is genoeg.

   $a = 1$, $x = 1$: links $(1 + 1)^2 = 4$, rechts $1 + 1 = 2$

Waar het misgaat: alleen de constante term bekijken en a = 1 als tweede oplossing opschrijven. Of bij stap 6 links en rechts door a delen, waarmee de oplossing a = 0 juist verdwijnt — dat is de fout die later bij vergelijkingen terugkomt.

8. f(x) = x² en g(x) = 2x − 1. Los exact op: f(g(x)) = g(f(x)).

x = 1, een dubbele oplossing

STAP VOOR STAP

1. f(g(x)): wat binnenkomt is 2x − 1, en f kwadrateert dat.
   $f(g(x)) = (2x - 1)^2$
2. g(f(x)): nu komt x² binnen, en g verdubbelt en haalt er 1 af.
   $g(f(x)) = 2x^2 - 1$
3. De vergelijking opschrijven.
   $(2x - 1)^2 = 2x^2 - 1$
4. Links uitwerken. Het dubbele product is 2 · 2x · (−1) = −4x.
   $(2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$
5. Alles naar één kant brengen. Pas op met de twee mintekens: −(2x² − 1) = −2x² + 1.
   $4x^2 - 4x + 1 - 2x^2 + 1 = 0 \rightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0$
6. Door 2 delen, dat rekent prettiger.
   $x^2 - 2x + 1 = 0$
7. Ontbinden. Dit is een volkomen kwadraat. (Via de discriminant kom je op hetzelfde uit: D = 4 − 4 = 0.)
   $(x - 1)^2 = 0$
8. Oplossen. Een kwadraat is nul als wat erin staat nul is.
   $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$, dubbele oplossing

Wat het toetst: correct kwadrateren en herkennen dat er een volkomen kwadraat uitkomt. De discriminant is 0, dus één oplossing die dubbel telt. “Exact oplossen” betekent hier: herleiden en ontbinden, niet de rekenmachine.

Doorvraag: “Vergelijk met opgave 7. Daar was het antwoord a = 0 en hier x = 1. Wat werd er in elk van de twee gevraagd?” Bij 7 een parameter zodat het altijd geldt; bij 8 de plaats waar het toevallig geldt.

Waar het misgaat: bij stap 4 (2x − 1)² uitwerken als 4x² − 1 of 4x² + 1. Of bij stap 5 het minteken voor de haak vergeten. Of de oplossing x = 1 vinden en niet zien dat het een dubbele is.

Invullen zonder f, g of x — de examenvorm

Opgave 9 en 10 zijn de brug naar het examen. Op het centraal examen heet dit nooit “samenstellen”. Er staat: maak een variabele vrij en vul die in de andere formule in. Dezelfde beweging als f(g(x)), maar de letters heten K en L, of r en h. Wie alleen met f, g en x heeft geoefend, herkent de opgave niet. Daarom staan deze twee erin.

9. Budgetvergelijking 2K + 3L = 60, productie P = K · L². Schrijf P als functie van L alleen, en geef het domein waarvoor K ≥ 0 en L ≥ 0.

$K = 30 - 1{,}5L$ · $P(L) = 30L^2 - 1{,}5L^3$ · domein $0 \le L \le 20$

STAP VOOR STAP

1. Bepaal eerst welke letter weg moet. Gevraagd is P als functie van L, dus in het eindantwoord mag geen K meer staan. K moet er dus uit.
2. K vrijmaken uit de budgetvergelijking. Eerst 3L naar rechts, dan door 2.
   $2K + 3L = 60 \rightarrow 2K = 60 - 3L \rightarrow K = 30 - 1{,}5L$
3. Dat invullen in de productiefunctie, op de plaats van K.
   $P = K \cdot L^2 \rightarrow P(L) = (30 - 1{,}5L) \cdot L^2$
4. Uitwerken: beide termen met L^2 vermenigvuldigen.
   $P(L) = 30L^2 - 1{,}5L^3$
5. Domein, eerste eis: die is gegeven.
   $L \ge 0$
6. Domein, tweede eis: ook K ≥ 0 moet gelden, en K staat nu in L uitgedrukt. Vul dat in en los op.
   $30 - 1{,}5L \ge 0 \rightarrow 30 \ge 1{,}5L \rightarrow L \le 20$
7. De twee eisen samen.
   domein: $0 \le L \le 20$

Wat het toetst: dat hij de samenstelling herkent zonder functienotatie, en dat hij het domein uit de *context* haalt in plaats van uit de formule. $P(L) = 30L^2 - 1{,}5L^3$ is op zichzelf voor alle L gedefinieerd; dat $0 \le L \le 20$ geldt, komt uit de betekenis van K en L.

Doorvraag: “P(L) bestaat wiskundig voor elke L. Waarom staat er dan toch een domein?” Omdat negatief kapitaal of negatieve arbeid niet bestaat. Dit is het verschil tussen een formule en een model.

Waar het misgaat: stap 6 overslaan en alleen L ≥ 0 noemen. Ook komt voor: bij stap 1 de verkeerde letter kiezen en L vrijmaken, en dan vastlopen omdat L^2 in de productiefunctie staat.

---

10. Cilinder met πr²h = 1000. Druk A = 2πr² + 2πrh uit als functie van r alleen, met domein.

$h = 1000/(\pi r^2)$ · $A(r) = 2\pi r^2 + 2000/r$ · domein $r > 0$

STAP VOOR STAP

1. Welke letter moet weg? Gevraagd is A als functie van r, dus h moet eruit.
2. h vrijmaken uit de inhoudsformule: beide kanten delen door πr^2.
   $\pi r^2 h = 1000 \rightarrow h = 1000/(\pi r^2)$
3. Invullen in de oppervlakteformule, op de plaats van h.
   $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h \rightarrow A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 1000/(\pi r^2)$
4. De tweede term vereenvoudigen, in drie kleine stappen. Eerst alles op één breuk.
   $2\pi r \cdot 1000/(\pi r^2) = 2000\pi r/(\pi r^2)$
5. Dan de π boven en onder wegstrepen.
   $2000\pi r/(\pi r^2) = 2000r/r^2$
6. En r/r^2 is $1/r$, want je streept één r weg.
   $2000r/r^2 = 2000/r$
7. Het eindantwoord.
   $A(r) = 2\pi r^2 + 2000/r$
8. Domein. Twee redenen die hetzelfde zeggen: een straal is positief, én bij $r = 0$ bestaat $2000/r$ niet.
   domein: $r > 0$

Wat het toetst: dezelfde beweging als opgave 9, nu met een vereenvoudigingsstap die netjes moet. Stap 4 tot 6 zijn met opzet uitgesplitst: dat is waar het meestal misgaat.

Doorvraag: “Waarom moesten we h eruit werken en niet r?” Omdat de vraag A als functie van r wil. Had de vraag om een functie van h gevraagd, dan had je r vrijgemaakt — en dan was er een wortel in gekomen.

Vooruitblik: in november komt deze functie terug bij optimaliseren. Dan zoekt hij de r waarvoor A minimaal is, door $A'(r) = 0$ op te lossen; dat geeft $r = 5 \cdot \sqrt[3]{4} / \sqrt[3]{\pi} \approx 5{,}42$. Dat kan alleen als A eerst van één variabele afhangt. Deze opgave is daar de voorwaarde voor; dat mag je hem zeggen.

Waar het misgaat: stap 4 tot 6 niet doen en $2\pi r \cdot 1000/(\pi r^2)$ laten staan — niet fout, maar onbruikbaar om straks te differentiëren. Of bij stap 6 de r helemaal wegstrepen en 2000 krijgen, of te weinig wegstrepen en $2000/r^2$ krijgen.

Verbanden en herkomst

Waar deze tien naartoe werken. Samenstellen is zelf geen examenonderwerp. Het is de vaardigheid onder drie andere dingen: de kettingregel in december, de inverse functies in de volgende les, en elke examenopgave waarin twee formules in elkaar geschoven worden. Opgave 1 en 4 oefenen het ontleden dat de kettingregel vraagt; opgave 6 loopt vooruit op de inverse; opgave 9 en 10 zijn de examenvorm.

opgave	oefent vooral	hangt samen met
1, 4	ontleden in binnen- en buitenfunctie	kettingregel, december
2, 3, 4	domein beredeneren, tekenschema	ongelijkheden, oktober
5	gebroken functie, asymptoot, domeinvalkuil	asymptoten en limieten, oktober
6	f(f(x)) = x	inverse functies, volgende les

7, 8	identiteit tegenover vergelijking	vergelijkingen, oktober
9, 10	formule vrijmaken en invullen	optimaliseren, november

Herkomst van de antwoorden. De tien opgaven staan in wiskunde/functies-combineren.html, onderdeel “Zelf proberen”. Niet alleen de eindantwoorden maar ook alle tussenstappen zijn symbolisch nagerekend met sympy 1.14: de losse domeinen en hun overlap bij opgave 2, de twee eisen die bij opgave 3 tot een strikte ongelijkheid leiden, de drie proefgetallen van het tekenschema bij opgave 4, het op één noemer brengen van teller en noemer bij opgave 5 en 6, de coëfficiëntvergelijking en het tegenvoorbeeld bij opgave 7, de ontbinding en de discriminant bij opgave 8, en de drie wegstreepstappen bij opgave 10. Bij opgave 6 is apart nagegaan dat f(x) = 1 geen oplossing heeft, bij opgave 5 dat wat er bij f binnenkomt precies bij x = ½ gelijk aan 2 wordt, en dat de vereenvoudigde vorm bij x = 0 wél gedefinieerd is — dat is de valkuil, geen rekenfout. Er is geen externe bron gebruikt; alles volgt uit de opgaven zelf.