Inverse functies

Antwoorden en toelichting bij de tien opgaven onder Zelf proberen. Elke uitwerking staat in losse stappen, met per stap de regel die je gebruikt - zo kun je precies zien waar hij afhaakt. De extra examenvraag onder de tien opgaven valt buiten dit blad.

Hoe je dit gebruikt. Laat Maurits eerst zelf schrijven. Klopt het antwoord maar is de weg onduidelijk, gebruik dan de doorvraag. Loopt hij vast, vraag welk stapnummer hij nog wel zelf kan zetten. De kolom “waar het misgaat” benoemt de fout die bij deze opgave vaak voorkomt.

De beperking bepaalt het antwoord

1. Gegeven $f(x) = (x - 2)^2$ met domein $x \leq 2$. Bepaal f^{-1}, met domein en bereik.

$f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x}$ · domein $x \geq 0$ · bereik $y \leq 2$

STAP VOOR STAP

1. $y = (x - 2)^2 \rightarrow$ verwissel: $x = (y - 2)^2$
2. Nu y vrijmaken: $y - 2 = \pm\sqrt{x}$.
3. Welke van de twee? Het domein van f was $x \leq 2$. Na het verwisselen is dat het bereik van de inverse, dus $y \leq 2$ en is $y - 2$ niet positief. Je moet hier de min nemen.
4. $y - 2 = -\sqrt{x} \rightarrow y = 2 - \sqrt{x}$
5. $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x}$, domein $x \geq 0$, bereik $y \leq 2$
6. Domein en bereik wisselen om: het bereik van f ($y \geq 0$) wordt het domein van de inverse, en het domein van f ($x \leq 2$) wordt het bereik.
7. controle: $f^{-1}(9) = 2 - 3 = -1$ en $f(-1) = (-1 - 2)^2 = 9$
8. Waar het om gaat: had er $x \geq 2$ gestaan, dan was het antwoord $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x}$ geweest. De beperking bepaalt welke tak je krijgt, en dat is precies waar punten verloren gaan.

Wat het toetst: welke tak je kiest bij een kwadratische inverse en waarom domein en bereik omwisselen.

Doorvraag: wat verandert er als het domein $x \geq 2$ is?

Waar het misgaat: automatisch de pluswortel nemen en de domeinbeperking vergeten.

De grafiek: spiegelen in y = x

2. f is een stijgende functie en het punt (3, 11) ligt op de grafiek. a. Welk punt ligt op de grafiek van f^{-1}? b. Leg uit waarom je de grafiek van f^{-1} krijgt door die van f te spiegelen in de lijn $y = x$. c. De grafieken van f en f^{-1} snijden elkaar. Waar moeten die snijpunten liggen?

a. (11, 3) · b. spiegelen in $y = x$ · c. op de lijn $y = x$

STAP VOOR STAP

1. a. Het punt (11, 3). Bij de inverse wisselen invoer en uitkomst van rol: uit $f(3) = 11$ volgt $f^{-1}(11) = 3$.
2. b. Spiegelen in de lijn $y = x$ verwisselt de twee coördinaten van elk punt: (a, b) wordt (b, a). Dat is precies wat de inverse met elk punt doet.

3. c. Op de lijn y = x. Stel dat (p, q) op beide grafieken ligt. Dan is f(p) = q, en uit $f^{-1}(p) = q$ volgt f(q) = p.
4. Zou p < q zijn, dan geeft f stijgend dat f(p) < f(q), dus q < p. Dat spreekt zichzelf tegen. Met p > q gaat het net zo mis. Er blijft alleen p = q over, en dan ligt het punt op y = x.
5. Waar het om gaat: hieruit volgt een snelkoppeling. Zoek je de snijpunten van f en f^{-1}, los dan f(x) = x op in plaats van $f(x) = f^{-1}(x)$. Dat scheelt de halve som. Let op: dit geldt alleen als f stijgend is.

Wat het toetst: coördinaten verwisselen, spiegelen in y = x en de snijpunten verklaren.

Doorvraag: waarom is de voorwaarde “stijgend” nodig?

Waar het misgaat: alleen “op y = x” antwoorden zonder de redenering.

3. Gegeven $f(x) = 3 \cdot 2^{x-1} + 4$. Bepaal f^{-1} met domein en bereik.

$f^{-1}(x) = 1 + {}^{2}\log((x - 4)/3)$ · domein $x > 4$ · bereik: R

STAP VOOR STAP

1. $y = 3 \cdot 2^{x-1} + 4$ → verwissel: $x = 3 \cdot 2^{y-1} + 4$
2. $x - 4 = 3 \cdot 2^{y-1}$ → $(x - 4)/3 = 2^{y-1}$
3. Nu de logaritme met grondtal 2 nemen, want die draait de macht terug:
4. $y - 1 = {}^{2}\log((x - 4)/3)$ → $f^{-1}(x) = 1 + {}^{2}\log((x - 4)/3)$
5. Voor het domein van de inverse heb je het bereik van f nodig. De macht 2^{x-1} is altijd positief, dus $3 \cdot 2^{x-1} > 0$ en daarmee f(x) > 4. De grafiek nadert y = 4 maar raakt die lijn nooit.
6. domein f^{-1}: $x > 4$ · bereik f^{-1}: alle reële getallen
7. Waar het om gaat: de horizontale asymptoot y = 4 van f wordt de verticale asymptoot x = 4 van de inverse. Spiegelen in y = x doet dat met elke asymptoot.

Wat het toetst: een exponentiële bewerking terugdraaien met een logaritme en het inverse domein bepalen.

Doorvraag: welke asymptoot krijgt de inverse?

Waar het misgaat: $x \geq 4$ schrijven; log(0) bestaat niet.

Parameters, samenstellen en controleren

4. Gegeven $f(x) = (2x + 1)/(x - a)$, met a een constante. a. Bepaal f^{-1}. b. Voor welke a geldt $f^{-1} = f$?

$f^{-1}(x) = (ax + 1)/(x - 2)$ · $f^{-1} = f$ alleen voor a = 2

STAP VOOR STAP

1. $y = (2x + 1)/(x - a)$ → verwissel: $x = (2y + 1)/(y - a)$
2. $x(y - a) = 2y + 1$ → $xy - xa = 2y + 1$ → $y(x - 2) = xa + 1$
3. $f^{-1}(x) = (ax + 1)/(x - 2)$
4. b. De eis is dat $(ax + 1)/(x - 2)$ en $(2x + 1)/(x - a)$ voor alle x hetzelfde zijn. Kruislings vermenigvuldigen en de coëfficiënten vergelijken:
5. $(ax + 1)(x - a) = ax^2 + (1 - a^2)x - a$
6. $(2x + 1)(x - 2) = 2x^2 - 3x - 2$
7. Dat geeft drie eisen: $a = 2$, en $1 - a^2 = -3$ dus $a = \pm 2$, en $-a = -2$ dus $a = 2$. Alle drie moeten gelden, dus a = 2.
8. controle: a = 2 geeft $f(x) = (2x + 1)/(x - 2)$ en $f^{-1}(x) = (2x + 1)/(x - 2)$

9. Waar het om gaat: zo'n functie is zijn eigen inverse. Bij Functies combineren en samenstellen, de les hiervoor, kwam er al een voorbij: f(x) = (x + 3)/(x - 1) met f(f(x)) = x. Dat is dezelfde eigenschap, anders opgeschreven.

Wat het toetst: een parameter meenemen bij het vrijmaken van y en voorwaarden combineren.

Doorvraag: waarom moet je alle drie de coëfficiënten vergelijken?

Waar het misgaat: stoppen na één voorwaarde en a = ±2 laten staan.

5. Gegeven f(x) = (x + 5)/(x - 3) voor x > 3. Bepaal f^{-1} en toon aan dat $f(f^{-1}(x)) = x$.

$f^{-1}(x) = (3x + 5)/(x - 1)$ en $f(f^{-1}(x)) = x$

STAP VOOR STAP

1. y = (x + 5)/(x - 3) → verwissel: x = (y + 5)/(y - 3)
2. x(y - 3) = y + 5 → xy - 3x = y + 5 → y(x - 1) = 3x + 5
3. $f^{-1}(x) = (3x + 5)/(x - 1)$
4. Nu de controle. Vul $f^{-1}(x)$ in in f en werk teller en noemer apart op één noemer:
5. teller: (3x + 5)/(x - 1) + 5 = (3x + 5 + 5(x - 1))/(x - 1) = 8x/(x - 1)
6. noemer: (3x + 5)/(x - 1) - 3 = (3x + 5 - 3(x - 1))/(x - 1) = 8/(x - 1)
7. delen: 8x/(x - 1) · (x - 1)/8 = x
8. Waar het om gaat: dit is de standaardcontrole op een inverse. Komt er geen x uit, dan zit er een rekenfout in. Je kunt hem bij elke opgave op deze pagina gebruiken, ook als er niet om gevraagd wordt.

Wat het toetst: een breuk in een breuk opwerken en de inverse controleren door samenstellen.

Doorvraag: werkt de controle ook andersom met $f^{-1}(f(x))$?

Waar het misgaat: teller en noemer niet eerst afzonderlijk op één noemer brengen.

6. Gegeven f(x) = √(2x - 6) + 1. Bepaal eerst domein en bereik van f, en daarna f^{-1} met domein en bereik.

domein f: x ≥ 3 · bereik f: y ≥ 1 · $f^{-1}(x) = ((x - 1)^2 + 6)/2$ · domein f^{-1}: x ≥ 1

STAP VOOR STAP

1. Domein van f: onder de wortel mag niets negatiefs staan, dus 2x - 6 ≥ 0 en x ≥ 3. Bereik van f: de wortel is nooit negatief, dus f(x) ≥ 1.
2. y = √(2x - 6) + 1 → verwissel: x = √(2y - 6) + 1
3. x - 1 = √(2y - 6) → $(x - 1)^2 = 2y - 6$
4. $f^{-1}(x) = ((x - 1)^2 + 6)/2$, domein x ≥ 1, bereik y ≥ 3
5. Waarom dat domein er echt bij moet. Zonder beperking is $((x - 1)^2 + 6)/2$ voor elke x gedefinieerd, maar dan is het de inverse niet meer. Neem x = -1: de formule geeft 5, en f(5) = √4 + 1 = 3. Je komt dus niet terug bij -1.
6. Reken je $f(f^{-1}(x))$ algebraïsch uit, dan komt er |x - 1| + 1 uit. Alleen voor x ≥ 1 is dat gelijk aan x. De absolute-waardestrepen zijn precies het domein dat je moest opschrijven.

Wat het toetst: bereik van f gebruiken als domein van de inverse en het absolute-waardeargument begrijpen.

Doorvraag: wat gebeurt er als je x = -1 invult in de inverseformule?

Waar het misgaat: de formule geven zonder domeinbeperking.

7. Gegeven $f(x) = 2x - 1$ en $g(x) = x^3$. a. Bepaal de inverse van $h(x) = f(g(x))$. b. Bepaal f^{-1} en g^{-1} apart, en onderzoek of h^{-1} gelijk is aan $f^{-1}(g^{-1}(x))$ of aan $g^{-1}(f^{-1}(x))$.

$h^{-1}(x) = ((x + 1)/2) = g^{-1}(f^{-1}(x))$; de volgorde draait om

STAP VOOR STAP

1. $h(x) = 2x^3 - 1$, dus $y = 2x^3 - 1 \rightarrow$ verwissel: $x = 2y^3 - 1$
2. $y^3 = (x + 1)/2 \rightarrow h^{-1}(x) = ((x + 1)/2)$
3. $f^{-1}(x) = (x + 1)/2 \cdot g^{-1}(x) = x$
4. $g^{-1}(f^{-1}(x)) = ((x + 1)/2)$ klopt
5. $f^{-1}(g^{-1}(x)) = (x + 1)/2$ klopt niet
6. Waar het om gaat: de volgorde draait om. Bij h gebeurt eerst g en daarna f; om dat terug te draaien moet je eerst f terugdraaien en daarna g. Zo doe je het ook met je jas en je trui: laatst aan, eerst uit.

Wat het toetst: samenstellingen terugdraaien in omgekeerde volgorde.

Doorvraag: test beide volgordes met één getal, bijvoorbeeld $x = 7$.

Waar het misgaat: f^{-1} en g^{-1} in dezelfde volgorde zetten als f en g.

Redeneren en toepassen

8. Gegeven $f(x) = 1/2x + 3$. a. Bepaal f^{-1}. b. Los exact op: $f(x) = f^{-1}(x)$. c. Los ook $f(x) = x$ op en verklaar wat je ziet.

$f^{-1}(x) = 2x - 6 \cdot f(x) = f^{-1}(x)$ geeft $x = 6 \cdot f(x) = x$ geeft ook $x = 6$

STAP VOOR STAP

1. $y = 1/2x + 3 \rightarrow$ verwissel: $x = 1/2y + 3 \rightarrow x - 3 = 1/2y$
2. $f^{-1}(x) = 2x - 6$
3. b. $1/2x + 3 = 2x - 6 \rightarrow 9 = 11/2x \rightarrow x = 6$
4. c. $1/2x + 3 = x \rightarrow 3 = 1/2x \rightarrow x = 6$
5. Twee keer hetzelfde antwoord, en dat is geen toeval. f is stijgend, dus volgens opgave 2c liggen alle snijpunten van f en f^{-1} op de lijn $y = x$. Daarom mag je de eenvoudigere vergelijking oplossen.
6. controle: $f(6) = 3 + 3 = 6$, dus het punt (6, 6) ligt op $y = x$

Wat het toetst: snijpunten van f en f^{-1} koppelen aan $f(x) = x$ wanneer f stijgend is.

Doorvraag: mag deze snelkoppeling bij elke functie?

Waar het misgaat: de overeenkomst als toeval beschrijven.

9. Bestaat de inverse? Beslis voor elk van deze drie, met uitleg, en zonder te differentiëren. a. $f(x) = x^3 - 3x$ op heel R b. $f(x) = x^3 + 3x$ op heel R c. $f(x) = 1/x$ voor $x > 0$.

a. nee · b. ja · c. ja

STAP VOOR STAP

1. Conclusie: a. nee; b. ja; c. ja.

2. Voor een inverse moet elke uitvoerwaarde bij hoogstens een invoerwaarde horen. De functie moet dus een-op-een zijn: zij mag niet eerst stijgen en daarna weer dalen. Een functie die overal stijgt of overal daalt heeft wel een inverse.
3. a. $f(x) = x^3 - 3x$. Zoek twee verschillende invoerwaarden met dezelfde uitkomst. $f(0) = 0$. Ook $f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^3 - 3*\sqrt{3} = 3*\sqrt{3} - 3*\sqrt{3} = 0$. Omdat 0 en $\sqrt{3}$ verschillend zijn maar dezelfde uitkomst 0 geven, is de functie niet een-op-een. De inverse zou bij 0 twee verschillende waarden moeten geven. Daarom bestaat er op heel R geen inverse.
4. b. $f(x) = x^3 + 3x$. Neem $x1 < x2$. Dan is
5. $f(x2) - f(x1) = (x2^3 + 3x2) - (x1^3 + 3x1) = (x2 - x1)(x2^2 + x1*x2 + x1^2 + 3)$. De eerste factor is positief. De tweede factor is ook positief, want $x2^2 + x1*x2 + x1^2$ is nooit negatief en daar komt 3 bij. Dus $f(x2) > f(x1)$: de functie is strikt stijgend op heel R en daarom een-op-een. De inverse bestaat.
6. c. $f(x) = 1/x$ voor $x > 0$. Deze functie daalt op het hele domein. Dat is geen probleem: dalen is ook een-op-een. Zonder differentieren: als $1/x1 = 1/x2$ en $x1,x2 > 0$, dan volgt na vermenigvuldigen $x1 = x2$. Er kan dus geen dubbele invoer bij dezelfde uitkomst zijn. De inverse bestaat en is $f^{-1}(x) = 1/x$, opnieuw met $x > 0$.

Wat het toetst: één-op-één herkennen zonder differentiëren; stijgen én dalen kunnen een inverse hebben.

Doorvraag: waarom is één tegenvoorbeeld bij a genoeg?

Waar het misgaat: denken dat een dalende functie geen inverse kan hebben.

---

10. Een voorwerp koelt af volgens $T(t) = 20 + 60 \cdot 0{,}9t$, met T in °C en t in minuten. a. Druk t uit in T. b. Na hoeveel minuten is de temperatuur 35 °C? Rond af op één decimaal. c. Wat is het domein van de inverse, en wat betekent dat?

$t = \log((T - 20)/60) / \log(0{,}9)$ · bij $T = 35$: $t \approx 13{,}2$ min · domein f^{-1}: $20 < T \leq 80$

STAP VOOR STAP

1. Let op: hier verwissel je de letters niet. T en t betekenen iets - temperatuur en tijd - dus je draait ze niet om. De vraag zegt al welke je vrij moet maken: t.
2. $T - 20 = 60 \cdot 0{,}9t \rightarrow (T - 20)/60 = 0{,}9t$
3. $t = \log((T - 20)/60) / \log(0{,}9)$
4. Je mag hier ook ln nemen in plaats van log, zolang je het bovén én onder doet: het grondtal valt tegen elkaar weg en het antwoord blijft 13,2. Boven ln en onder log geeft een fout antwoord. Dat staat uitgelegd bij Machten en logaritmen.
5. b. Bij $T = 35$ is $(35 - 20)/60 = 0{,}25$.
6. $t = \log(0{,}25) / \log(0{,}9) \approx 13{,}2$ minuten
7. c. Bij $t = 0$ is $T = 80$. Naarmate t groeit nadert T de waarde 20, maar bereikt die nooit. Het bereik van T is dus $20 < T \leq 80$, en dat is het domein van de inverse.
8. Wat dat betekent: je kunt alleen een tijd uitrekenen voor temperaturen tussen 20 en 80 °C. Kouder dan 20 °C wordt het voorwerp nooit; 20 °C is de omgevingstemperatuur, en in de formule is dat de horizontale asymptoot. De functie geeft de temperatuur bij een tijdstip, de inverse geeft het tijdstip bij een temperatuur.

Wat het toetst: een exponentieel model terugrekenen en het bereik als domein van de inverse lezen.

Doorvraag: wat betekent de 20 in het model?

Waar het misgaat: de bovengrens $T \leq 80$ of de ondergrens $T > 20$ vergeten.