Antwoordblad november · Wiskunde B

Voor de begeleider · 7 onderwerpen · 75 oefenopgaven

Laat Maurits eerst zelfstandig werken. Gebruik daarna de uitwerkingen om domein, tussenstappen, tekenwisseling en conclusie na te lopen.

De nummering volgt de opgaven onder Zelf proberen op iedere lespagina; bij de standaardafgeleiden zijn het er vijftien. De aparte examenvragen en hun puntenverdeling blijven op de lespagina’s staan.

- De afgeleiden van de standaardfuncties
- Somregel en constante factoren
- Som-, verschil- en productregel
- De afgeleide en de raaklijn
- Stijgen, dalen en extremen
- De tweede afgeleide en buigpunten
- Optimaliseren

De afgeleiden van de standaardfuncties

November · antwoorden bij opgaven 1–10; aanvulling 11–15 op p.16

1. Differentieer $f(x) = 3\sqrt{x} - 2/x^2$.

Schrijf eerst als machten: $f(x) = 3x^{½} - 2x^{-2}$.

$f'(x) = 1½x^{-½} + 4x^{-3} = 3/(2\sqrt{x}) + 4/x^3$

Het domein is $x > 0$: de wortel vraagt $x \geq 0$ en de noemer sluit $x = 0$ uit.

2. Differentieer $f(x) = (2x^3 - 5x + 1)/x$.

Niet de quotiëntregel pakken: deel eerst term voor term door x.

$f(x) = 2x^2 - 5 + x^{-1}$

$f'(x) = 4x - 1/x^2$

De voorwaarde $x \neq 0$ blijft gelden na het herschrijven: delen door nul kan niet.

3. Differentieer $f(x) = 4e^x - 3\cdot\ln(x)$ voor $x > 0$.

$f'(x) = 4e^x - 3/x$

4. Bereken exact de helling van $f(x) = \sqrt{x}$ in $x = 9$.

$f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$.

$f'(9) = 1/(2\cdot3) = 1/6$

5. Bereken exact $f'(0)$ voor $f(x) = 2^x$.

De regel is $(a^x)' = \ln(a)\cdot a^x$, dus niet $2\cdot2^{x-1}$.

$f'(x) = \ln(2)\cdot2^x \rightarrow f'(0) = \ln(2) \approx 0{,}69$

6. Voor welke x heeft $f(x) = x^3 - 12x$ een horizontale raaklijn?

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x^2 = 4$

$x = -2$ of $x = 2$.

7. Bereken exact $f'(\pi/4)$ voor $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

$f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$. Bij $x = \pi/4$ zijn sinus en cosinus allebei $½\sqrt{2}$.

$f'(\pi/4) = ½\sqrt{2} - ½\sqrt{2} = 0$

8. Toon aan dat de grafiek van $f(x) = \ln(x)$ nergens een horizontale raaklijn heeft.

$f'(x) = 1/x$. Een breuk is nul als de teller nul is, maar de teller is hier 1.

$1/x = 0$ heeft dus geen oplossing: de helling is nooit 0. Voor grote x wordt hij wel steeds kleiner, maar nooit precies nul.

9. Geef de afgeleide van $f(x) = x\sqrt{x}$ voor x > 0. Onderzoek ook de helling vanaf rechts bij x = 0.

Schrijf $x\sqrt{x} = x^{3/2}$. Voor x > 0 geldt:

$f'(x) = (3/2)x^{1/2} = (3/2)\sqrt{x}$.

Het domein van f is $[0, \infty)$. Bij x = 0 kun je alleen van rechts naderen. Bereken daar het differentiequotiënt, met h > 0:

$[f(h) - f(0)]/h = h\sqrt{h}/h = \sqrt{h} \to 0$.

De helling vanaf rechts is dus 0. De grafiek heeft bij de oorsprong een horizontale raaklijn vanaf rechts. Een tweezijdige afgeleide kun je daar niet bepalen, omdat f links van 0 niet bestaat. Dat betekent niet dat de grafiek bij 0 een scherpe hoek heeft.

10. Voor welke a hebben $f(x) = a \cdot x^2$ en $g(x) = \ln(x)$ dezelfde helling bij x = 1?

$f'(x) = 2ax \;\to\; f'(1) = 2a$

$g'(x) = 1/x \;\to\; g'(1) = 1$

$2a = 1 \;\to\; a = ½$

Somregel en constante factoren

November · antwoorden bij opgaven 1-10

1. Differentieer $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7$.

Term voor term. De constante 7 heeft afgeleide 0.

$f'(x) = 12x^3 - 6x^2$

2. Differentieer $f(x) = (x^2 - 3)(x + 1)$ **zonder productregel.**

Werk eerst de haakjes uit; dan is het een gewone som.

$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 3$

3. Differentieer $f(x) = 5\sqrt{x} - 4/x$.

Als machten: $5x^{½} - 4x^{-1}$.

$f'(x) = 2½x^{-½} + 4x^{-2} = 5/(2\sqrt{x}) + 4/x^2$

Hier geldt $x > 0$, door de combinatie van $\sqrt{x}$ en delen door x.

4. Differentieer $f(x) = 2e^x - 3\cdot\sin(x)$.

De constante factoren blijven staan; let op het minteken.

$f'(x) = 2e^x - 3\cdot\cos(x)$

5. Gegeven is $f(x) = ax^2 + bx + c$, met $a \neq 0$. Bepaal de afgeleide en de x-coördinaat van de top.

$f'(x) = 2ax + b$

$2ax + b = 0 \;\rightarrow\; x = -b/(2a)$

Dat is precies de formule voor de top die je uit de onderbouw kent. Nu weet je waar hij vandaan komt.

De voorwaarde $a \neq 0$ maakt dit een kwadratische functie. Voor $a > 0$ is de top een minimum; voor $a < 0$ een maximum. Bij $a = 0$ krijg je een rechte lijn of een constante functie, zonder unieke top.

6. Voor welke x heeft $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ **een horizontale raaklijn?**

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$

$3(x - 3)(x + 1) = 0 \;\rightarrow\; x = -1$ of $x = 3$

7. Differentieer $f(x) = ¼x^4 - 2x$.

De constante factor ¼ blijft gewoon staan: $(c\cdot f)' = c\cdot f'$.

$f'(x) = x^3 - 2$

8. Differentieer $f(x) = (3x^2 + 1)/5$.

Delen door 5 is vermenigvuldigen met ⅕: een constante factor, geen quotiënt.

$f'(x) = 6x/5$

9. Voor welke p heeft $f(x) = x^3 + px$ nergens een horizontale raaklijn?

$f'(x) = 3x^2 + p$

$3x^2$ is nooit negatief. Is $p > 0$, dan is $3x^2 + p$ altijd positief en heeft $f'(x) = 0$ geen oplossing.

Dus $p > 0$. Bij $p = 0$ is $x = 0$ wél een oplossing (al is het daar geen top), en bij $p < 0$ zijn er twee.

10. Gegeven $f(x) = ax^3 + bx$, met constante a en b. De helling bij x = 0 is –3 en de helling bij x = 1 is 3. Bereken exact a en b.

Differentieer term voor term: $f'(x) = 3ax^2 + b$.

Bij $x = 0$: $f'(0) = b = -3$.

Bij $x = 1$: $f'(1) = 3a + b = 3$. Vul $b = -3$ in: $3a - 3 = 3$, dus $a = 2$.

Antwoord: a = 2 en b = –3. Controle: $f'(x) = 6x^2 - 3$ geeft inderdaad $f'(0) = -3$ en $f'(1) = 3$.

Som-, verschil- en productregel

November · antwoorden bij opgaven 1-10

1. Differentieer $f(x) = x^2e^x$.

$g = x^2$ en $h = e^x$, dus $g' = 2x$ en $h' = e^x$.

$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (x^2 + 2x)e^x$

2. Differentieer $f(x) = x \cdot \ln(x)$ voor $x > 0$.

$g = x$ en $h = \ln(x)$, dus $g' = 1$ en $h' = 1/x$.

$f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot (1/x) = \ln(x) + 1$

3. Differentieer $f(x) = (2x - 1)(x^2 + 3)$ mét de productregel, en controleer door eerst uit te werken.

$f'(x) = 2(x^2 + 3) + (2x - 1)(2x) = 2x^2 + 6 + 4x^2 - 2x$

$f'(x) = 6x^2 - 2x + 6$

Controle: $f(x) = 2x^3 - x^2 + 6x - 3$ geeft term voor term hetzelfde.

4. Differentieer $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^x$.

$g = x^{½}$ met $g' = 1/(2\sqrt{x})$, en $h = e^x$.

$f'(x) = e^x/(2\sqrt{x}) + \sqrt{x} \cdot e^x = e^x(1/(2\sqrt{x}) + \sqrt{x})$

De functie bestaat voor $x \geq 0$; deze afgeleide geldt voor $x > 0$. Bij $x = 0$ bestaat geen eindige helling vanaf rechts.

5. Bereken exact $f'(\pi)$ voor $f(x) = x \cdot \sin(x)$.

$f'(x) = \sin(x) + x \cdot \cos(x)$

$f'(\pi) = 0 + \pi \cdot (-1) = -\pi$

6. Voor welke x heeft $f(x) = x^2e^x$ een horizontale raaklijn?

$f'(x) = (x^2 + 2x)e^x = x(x + 2)e^x$

e^x is altijd positief, dus die kan nooit nul worden. Alleen $x(x + 2)$ telt.

$x = 0$ of $x = -2$

7. Differentieer $f(x) = (x + 1)^2$ door het als een product te lezen.

Schrijf $(x + 1)^2$ als $(x + 1)(x + 1)$. Dan is $g = h = x + 1$ en $g' = h' = 1$.

$f'(x) = 1 \cdot (x + 1) + (x + 1) \cdot 1 = 2(x + 1)$

Controle door uitwerken: $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$, dus de afgeleide is $2x + 2$. Dat is hetzelfde als $2(x + 1)$.

8. Gegeven $f(x) = x \cdot e^x$. Toon aan dat $f'(x) - f(x) = e^x$ voor elke x.

Met de productregel: $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x + 1)e^x$.

Trek de oorspronkelijke functie af: $f'(x) - f(x) = (x + 1)e^x - xe^x = e^x$.

De gelijkheid geldt voor elke reële x: beide functies zijn daar gedefinieerd en de herleiding gebruikt geen deling door een mogelijk nulpunt.

9. Differentieer $f(x) = x^3 \cdot \ln(x)$ voor $x > 0$.

$f'(x) = 3x^2 \cdot \ln(x) + x^3 \cdot (1/x) = 3x^2\ln(x) + x^2$

10. Voor welke a heeft $f(x) = (x + a)e^x$ een horizontale raaklijn bij x = 1?

$f'(x) = e^x + (x + a)e^x = (x + a + 1)e^x$

$f'(1) = (2 + a)e = 0 \rightarrow a = -2$

De e-macht valt weg omdat die nooit nul is; alleen de haak kan nul worden.

De afgeleide en de raaklijn

November · antwoorden bij opgaven 1-10

1. Geef de raaklijn aan $f(x) = x^3 - 3x$ in x = 2.

$f(2) = 8 - 6 = 2$ · $f'(x) = 3x^2 - 3$, dus $f'(2) = 9$

$y = 2 + 9(x - 2) = 9x - 16$

2. Geef de raaklijn aan $f(x) = \sqrt{x}$ in x = 4.

$f(4) = 2$ · $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$, dus $f'(4) = ¼$

$y = 2 + ¼(x - 4) = ¼x + 1$

3. Waar is de raaklijn aan $f(x) = x^2 - 4x$ evenwijdig aan $y = 2x$? Geef ook die raaklijn.

Evenwijdig betekent dezelfde richtingscoëfficiënt, dus $f'(x) = 2$.

$2x - 4 = 2 \rightarrow x = 3$

$f(3) = 9 - 12 = -3 \rightarrow y = -3 + 2(x - 3) = 2x - 9$

4. Vergelijk voor $f(x) = x^2$ de gemiddelde verandering per eenheid x op [1, 4] met de helling bij x = 1.

gemiddeld: $(f(4) - f(1))/(4 - 1) = (16 - 1)/3 = 5$

lokaal: $f'(1) = 2$

De koorde is veel steiler dan de raaklijn in het linkeruiteinde, omdat de grafiek over [1, 4] steeds steiler wordt. Gemiddeld en lokaal zijn twee verschillende dingen.

De totale verandering is f(4) − f(1) = 15. Het differentiequotiënt is 15/(4 − 1) = 5: dat is de gemiddelde verandering *per eenheid x*.

5. Er is precies één raaklijn aan $f(x) = e^x$ die door de oorsprong gaat. Bepaal die lijn.

Noem het raakpunt (a, e^a). De raaklijn is $y = e^a + e^a(x - a)$.

Door de oorsprong betekent: vul x = 0 en y = 0 in.

$0 = e^a - a \cdot e^a = (1 - a)e^a$

e^a is nooit nul, dus 1 − a = 0 en a = 1.

$y = e \cdot x$

6. Geef de raaklijn aan $f(x) = \ln(x)$ in x = 1. Bereken ook het snijpunt van deze raaklijn met de y-as.

$f(1) = \ln(1) = 0$. De afgeleide is $f'(x) = 1/x$, dus $f'(1) = 1$.

De raaklijn is $y = f(1) + f'(1)(x - 1) = 0 + 1 \cdot (x - 1) =$ **x − 1**.

Op de y-as is x = 0. Invullen in de *raaklijn* geeft y = −1. Het snijpunt is **(0, −1)**.

De functie ln(x) bestaat alleen voor x > 0, maar de raaklijn is een rechte lijn die je ook bij x = 0 kunt bekijken.

7. Geef de raaklijn aan $f(x) = 1/x$ in x = 2.

$f(2) = ½$ · $f'(x) = -1/x^2$, dus $f'(2) = -¼$

$y = ½ - ¼(x - 2) = -¼x + 1$

8. Voor welke a raakt de lijn $y = ax$ aan de parabool $f(x) = x^2 + 1$?

Raken betekent twee dingen tegelijk: dezelfde hoogte én dezelfde helling.

$x^2 + 1 = ax$ en $2x = a$

Vul $a = 2x$ in de eerste in: $x^2 + 1 = 2x^2$, dus $x^2 = 1$ en $x = \pm 1$.

$a = 2$ (raakpunt $(1, 2)$) of $a = -2$ (raakpunt $(-1, 2)$)

9. De positie van een voorwerp langs een rechte lijn is $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ meter, met $t \geq 0$ in seconden. Bereken $v(1)$ en bepaal op welke tijdstippen het voorwerp stilstaat.

De snelheid is de afgeleide van de plaats.

$v(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t - 1)(t - 3)$

$v(1) = 0$ m/s

Het voorwerp staat stil op $t = 1$ en $t = 3$ seconden. Daartussen is v negatief: dan beweegt het terug.

s is hier de **positie**, niet de totale afgelegde afstand. Tussen $t = 1$ en $t = 3$ is v negatief: het voorwerp beweegt terug. De totale afgelegde afstand kan niet afnemen.

10. De raaklijn aan $f(x) = x^3$ bij $x = a$, met $a \neq 0$, snijdt de grafiek nog een keer. Toon aan dat de x-coördinaat van dat tweede snijpunt $-2a$ is.

raaklijn: $y = a^3 + 3a^2(x - a) = 3a^2x - 2a^3$

Snijden met de grafiek: stel x^3 gelijk aan de raaklijn en breng alles naar één kant.

$x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0$

Omdat $x = a$ een raakpunt is, zit $(x - a)$ er *dubbel* in. Ontbinden geeft:

$(x - a)^2(x + 2a) = 0$

De derde oplossing is dus $x = -2a$. Bij $a = 0$ vallen alle drie samen; dan is er geen tweede snijpunt.

Stijgen, dalen en extremen

November · antwoorden bij opgaven 1-10

1. Bepaal de extremen van $f(x) = x^3 - 3x^2$ met een tekenschema.

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

Nulpunten $x = 0$ en $x = 2$. Proefgetallen: $f'(-1) = 9$, $f'(1) = -3$, $f'(3) = 9$.

Het teken gaat + → − → +, dus eerst een maximum en dan een minimum.

maximum $(0, 0)$ · minimum $(2, -4)$

2. Bepaal de extremen van $f(x) = x^4 - 8x^2$.

$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x - 2)(x + 2)$

Drie nulpunten: $x = -2$, 0 en 2. Het teken gaat − → + → − → +.

minima $(-2, -16)$ en $(2, -16)$ · maximum $(0, 0)$

3. Bepaal het minimum van $f(x) = x \cdot e^x$.

$f'(x) = (x + 1)e^x = 0 \rightarrow x = -1$

De e-macht is altijd positief, dus f' heeft hetzelfde teken als $x + 1$: eerst negatief, daarna positief.

minimum $(-1, -1/e) \approx (-1; -0{,}37)$

4. Bepaal het minimum van $f(x) = x + 4/x$ voor $x > 0$.

$f'(x) = 1 - 4/x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 4$

$x = -2$ valt af vanwege het domein.

$f(2) = 2 + 2 = 4 \rightarrow$ minimum $(2, 4)$

Voor $0 < x < 2$ is $f'(x) < 0$; voor $x > 2$ is $f'(x) > 0$. De functie daalt dus eerst en stijgt daarna. Daarom is 4 het absolute minimum op $x > 0$.

5. Bepaal het absolute maximum en minimum van $f(x) = x^3 - 3x$ op het interval $[0, 3]$.

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = -1$ of $x = 1$

$x = -1$ ligt buiten het interval. Te vergelijken blijven over: de kandidaat $x = 1$ en de randen $x = 0$ en $x = 3$.

$f(0) = 0$ · $f(1) = -2$ · $f(3) = 18$

Minimum −2 bij $x = 1$, maximum 18 bij $x = 3$. Het maximum ligt op een rand, waar de afgeleide niet nul is.

6. Bepaal het maximum van $f(x) = \ln(x) - x$ voor $x > 0$.

$f'(x) = 1/x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

Voor $x < 1$ is $1/x > 1$ dus f' positief; voor $x > 1$ andersom. Een maximum.

$f(1) = 0 - 1 = -1 \rightarrow$ maximum $(1, -1)$

Omdat het maximum −1 is, geldt $\ln(x) - x \leq -1$, dus $\ln(x) \leq x - 1$. De raaklijn $y = x - 1$ uit de vorige les ligt dus nergens onder de grafiek; bij $x = 1$ raken ze elkaar.

7. Voor welke a heeft $f(x) = x^3 + ax$ geen enkel extremum?

$f'(x) = 3x^2 + a$

Is $a > 0$, dan is f' altijd positief: geen oplossing, dus geen extremum. Is $a < 0$, dan zijn er twee nulpunten en dus twee extremen.

Bij $a = 0$ is $f'(x) = 3x^2$, nul bij $x = 0$, maar daar wisselt het teken niet: ook geen extremum. Het antwoord is dus $a \geq 0$.

Voor $a < 0$ zijn de nulpunten van f' gelijk aan $\pm\sqrt{(-a/3)}$. Het teken van $3x^2 + a$ is achtereenvolgens $+, -, +$. Er is dus een lokaal maximum bij de negatieve oplossing en een lokaal minimum bij de positieve oplossing. Voor $a = 0$ is $f' = 3x^2$: wel nul bij 0, maar geen tekenwisseling en dus geen extremum.

8. Bereken exact de extreme waarde van $f(x) = e^x - 2x$.

$f'(x) = e^x - 2 = 0 \;\rightarrow\; e^x = 2 \;\rightarrow\; x = \ln 2$

$f'(0) = -1$ en $f'(1) = e - 2 \approx 0{,}72$: het teken gaat $- \rightarrow +$, dus een minimum.

$f(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2\ln 2 = 2 - 2\ln 2 \;\rightarrow\; \min f(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 \approx 0{,}61$

9. Bepaal de extremen van $f(x) = x^2e^x$.

$f'(x) = (x^2 + 2x)e^x = x(x + 2)e^x$

De e-macht telt niet mee voor het teken. $x(x + 2)$ gaat $+ \rightarrow - \rightarrow +$.

maximum $(-2, 4e^{-2}) \approx (-2; 0{,}54)$ · minimum $(0, 0)$

Het maximum bij $x = -2$ is **lokaal**: voor grote positieve x groeit f onbeperkt. Het minimum 0 bij $x = 0$ is ook absoluut, want $x^2e^x \geq 0$ voor elke x.

10. Bepaal het minimum van $f(x) = (x - 3)\sqrt{x}$ voor $x > 0$. Toon aan dat het een minimum is.

Schrijf eerst als machten: $f(x) = x^{3/2} - 3x^{1/2}$. Gebruik de machtsregel en somregel.

$f'(x) = (3/2)\sqrt{x} - 3/(2\sqrt{x}) = 3(x - 1)/(2\sqrt{x})$.

Voor $x > 0$ is de noemer positief. De afgeleide is 0 bij $x = 1$, negatief voor $0 < x < 1$ en positief voor $x > 1$.

De functie daalt tot $x = 1$ en stijgt daarna. Dus $f(1) = (1 - 3) \cdot 1 =$ **-2 is het minimum**, bereikt bij $x = 1$. Het punt is $(1, -2)$.

De tweede afgeleide en buigpunten

November · antwoorden bij opgaven 1-10

1. Bepaal het buigpunt van $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ en $f''(x) = 6x - 12$.

$6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$

$f''(1) = -6$ en $f''(3) = 6$, dus het teken wisselt.

$f(2) = 8 - 24 + 18 = 2 \rightarrow$ buigpunt $(2, 2)$

2. Bepaal alle buigpunten van $f(x) = x^4 - 6x^2$.

$f'(x) = 4x^3 - 12x$ en $f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1)$.

$12(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x = -1$ of $x = 1$

Proefgetallen: $f''(-2) = 36$, $f''(0) = -12$, $f''(2) = 36$. Het teken wisselt bij allebei.

$f(-1) = f(1) = -5 \rightarrow (-1, -5)$ en $(1, -5)$

3. Heeft $f(x) = x^4$ een buigpunt bij x = 0? Onderbouw je antwoord.

Nee. $f''(x) = 12x^2$ is nul bij $x = 0$, maar f'' is links én rechts positief ($f''(-1) = f''(1) = 12$).

Zonder tekenwisseling is er geen buigpunt. De grafiek blijft overal een kom.

4. Laat zien dat $f(x) = x^3$ bij x = 0 zowel een horizontale raaklijn als een buigpunt heeft.

$f'(x) = 3x^2$, dus $f'(0) = 0$: de raaklijn is horizontaal.

$f''(x) = 6x$, en $f''(-1) = -6$, $f''(1) = 6$: het teken wisselt, dus $(0, 0)$ is een buigpunt.

Waar het om gaat: een horizontale raaklijn hoeft geen top te zijn. Hier is het een buigpunt met helling nul.

5. Bepaal het buigpunt van $f(x) = x \cdot e^x$.

Met de productregel: $f'(x) = e^x + x \cdot e^x = (x + 1)e^x$.

Nog een keer: $f''(x) = e^x + (x + 1)e^x = (x + 2)e^x$.

e^x is altijd positief, dus het teken hangt alleen van $x + 2$ af: nul bij $x = -2$, en daar wisselt het teken.

$f(-2) = -2e^{-2} \approx -0{,}27 \rightarrow$ buigpunt $(-2, -2e^{-2})$

6. Heeft $f(x) = \ln(x)$ een buigpunt?

$f'(x) = 1/x$ en $f''(x) = -1/x^2$.

Voor elke $x > 0$ is $-1/x^2$ negatief, dus f'' wordt nooit nul en wisselt nooit van teken. Geen buigpunt: de grafiek is overal een heuvel.

7. Geef de buigraaklijn van $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x$ en $f''(x) = 6x - 6$, dus $x = 1$.

$f''(0) = -6$ en $f''(2) = 6$: het teken wisselt.

$f(1) = 1 - 3 + 4 = 2 \cdot f'(1) = 3 - 6 = -3$

$y = 2 - 3(x - 1) = -3x + 5$

8. Toon aan dat $f(x) = 4 + 3e^{-0{,}5x}$ voor alle x afnemend dalend is.

Te tonen: $f'(x) < 0$ en $f''(x) > 0$ voor alle x.

$f'(x) = 3 \cdot (-0{,}5)e^{-0{,}5x} = -1{,}5e^{-0{,}5x}$

$f''(x) = -1{,}5 \cdot (-0{,}5)e^{-0{,}5x} = 0{,}75e^{-0{,}5x}$

Voor elke x geldt $e^{-0{,}5x} > 0$, dus $f'(x) = -1{,}5 \cdot (\text{positief}) < 0$ en $f''(x) = 0{,}75 \cdot (\text{positief}) > 0$.

Dus f is afnemend dalend.

(Opgave 8 is op 18-11-2026 vervangen. De oude opgave 8 is nu opgave 14 op de uitwerkingenpagina.)

9. Voor welke a heeft $f(x) = x^3 + ax^2$ een buigpunt bij x = 1?

$f'(x) = 3x^2 + 2ax$ en $f''(x) = 6x + 2a$.

$f''(1) = 6 + 2a = 0 \;\rightarrow\; a = -3$

Controle: met $a = -3$ is $f''(x) = 6x - 6$, en dat wisselt bij $x = 1$ inderdaad van teken. Omdat f'' hier lineair is, kan het nooit misgaan zoals bij opgave 3.

10. Bepaal exact de twee buigpunten van $f(x) = x^2e^x$. Gebruik twee keer de productregel.

Eerst $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (x^2 + 2x)e^x$.

Nogmaals de productregel: $f''(x) = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x)e^x = (x^2 + 4x + 2)e^x$.

Omdat e^x altijd positief is, los je $x^2 + 4x + 2 = 0$ op. Kwadraatafsplitsen geeft $(x + 2)^2 = 2$, dus $x = -2 - \sqrt{2}$ of $x = -2 + \sqrt{2}$.

De factor $x^2 + 4x + 2$ is positief buiten de twee nulpunten en negatief ertussen. f'' wisselt dus bij beide nulpunten van teken.

Buigpunten:
$(-2 - \sqrt{2},\ (6 + 4\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}})$
en $(-2 + \sqrt{2},\ (6 - 4\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}})$.

Voor de y-coördinaten vul je de gevonden x-waarden in $f(x) = x^2e^x$ in. Gebruik daarbij $(-2 \pm \sqrt{2})^2 = 6 \mp 4\sqrt{2}$.

Optimaliseren

November · antwoorden bij opgaven 1-10

1. Van een rechthoek is de omtrek 36 cm. Welke afmetingen geven de grootste oppervlakte?

Met breedte x is de hoogte 18 − x, dus $A(x) = x(18 - x) = 18x - x^2$, met $0 < x < 18$.

$A'(x) = 18 - 2x = 0 \rightarrow x = 9$

$A'' = -2 < 0$, dus een maximum. Het vierkant van 9 bij 9 cm, met oppervlakte 81 cm^2.

2. Een blik zonder deksel moet 1000 cm^3 bevatten. Bij welke straal is de benodigde oppervlakte minimaal?

Nu alleen een bodem en een wand: $A = \pi r^2 + 2\pi rh$, met $h = 1000/(\pi r^2)$.

$A(r) = \pi r^2 + 2000/r$

$A'(r) = 2\pi r - 2000/r^2 = 0 \rightarrow r^3 = 1000/\pi$

$r \approx 6{,}83$ cm, $h \approx 6{,}83$ cm en $A \approx 439$ cm^2. Zonder deksel is $h/r = 1$: het blik is even hoog als de straal.

Het domein is $r > 0$. Exact is $r = \sqrt[3]{(1000/\pi)}$ cm.

$A'(r) = (2\pi r^3 - 2000)/r^2$.

De noemer is positief. Vóór $r = \sqrt[3]{(1000/\pi)}$ is de teller negatief en erna positief. A daalt eerst en stijgt daarna: dit is het absolute minimum. Uit $\pi r^3 = 1000$ volgt $h = 1000/(\pi r^2) = r$.

3. Welke punten op de parabool $y = x^2$ liggen het dichtst bij (0, 3)?

Minimaliseer het kwadraat van de afstand; dat scheelt een wortel en geeft hetzelfde punt.

$d^2 = x^2 + (x^2 - 3)^2 = x^4 - 5x^2 + 9$

afgeleide: $4x^3 - 10x = 2x(2x^2 - 5) = 0 \rightarrow x = 0$ of $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{10}$

Drie kandidaten, dus vergelijken: bij $x = 0$ is $d^2 = 9$, bij $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{10}$ is $d^2 = 11/4$.

De punten $(\pm\frac{1}{2}\sqrt{10}, 2\frac{1}{2})$ liggen het dichtst bij, op afstand $\frac{1}{2}\sqrt{11} \approx 1{,}66$. **x = 0 is juist de slechtste van de drie** - daar is de afstand 3.

Waarom zijn dit de absolute minima, ook buiten de drie kandidaten? Herschrijf:

$d^2 = (x^2 - 5/2)^2 + 11/4 \geq 11/4$.

Het kwadraat is minimaal 0, precies voor $x = \pm\sqrt{10}/2$. De twee gevonden punten geven dus werkelijk de kleinste afstand.

4. In een model geldt $2K + 3L = 60$ en $P = K \cdot L^2$. K en L zijn niet-negatieve reële getallen. Bij welke L is P maximaal?

Gebruik de nevenvoorwaarde om K weg te werken. $K = 30 - 1{,}5L$ geeft $P(L) = 30L^2 - 1{,}5L^3$, met $0 \leq L \leq 20$.

$P'(L) = 60L - 4{,}5L^2 = L(60 - 4{,}5L) = 0 \rightarrow L = 0$ of $L = 40/3$

$L = 0$ geeft $P = 0$, en de rand $L = 20$ geeft $K = 0$ en dus ook $P = 0$.

$L = 40/3 \approx 13{,}3$ met $K = 10 \rightarrow P = 16000/9 \approx 1778$

5. Uit een vierkant stuk karton van 20 bij 20 cm knip je in elke hoek een vierkantje van x bij x, en vouw je de randen omhoog. Bij welke x is de inhoud maximaal?

De bodem wordt (20 − 2x) bij (20 − 2x) en de hoogte x.

$V(x) = x(20 - 2x)^2 = 4x^3 - 80x^2 + 400x, \quad \text{met } 0 < x < 10$

$V'(x) = 12x^2 - 160x + 400 = 0 \;\rightarrow\; x = 10/3 \text{ of } x = 10$

x = 10 valt buiten het domein (dan is er geen bodem meer). Dus x = 10/3 ≈ 3,3 cm, met V = 16000/27 ≈ 593 cm^3.

Controle: $V'(x) = 12(x - 10/3)(x - 10)$. Voor 0 < x < 10/3 is V′ positief; voor 10/3 < x < 10 negatief. De inhoud stijgt eerst en daalt daarna, dus x = 10/3 geeft het maximum.

6. Bepaal het minimum van $f(x) = x + 4/x$ voor x > 0.

$f'(x) = 1 - 4/x^2 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = 4 \;\rightarrow\; x = 2$

x = −2 valt af wegens het domein.

$f(2) = 2 + 2 = 4$

Voor 0 < x < 2 is f′(x) < 0; voor x > 2 is f′(x) > 0. De functie daalt dus eerst en stijgt daarna. Daarom is 4 het absolute minimum op x > 0.

7. Een rechthoek staat met zijn onderkant op de x-as en met zijn bovenhoeken op de parabool $y = 4 - x^2$. Welke breedte geeft de grootste oppervlakte?

Met rechterhoek bij x is de breedte 2x en de hoogte $4 - x^2$.

$A(x) = 2x(4 - x^2) = 8x - 2x^3, \quad \text{met } 0 < x < 2$

$A'(x) = 8 - 6x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = \tfrac{2}{3}\sqrt{3} \approx 1{,}15$

De breedte is dan 2x ≈ 2,31 en de oppervlakte $32\sqrt{3}/9 \approx 6{,}16$.

De exacte breedte is $4\sqrt{3}/3$. $A' = 8 - 6x^2$ is positief vóór $x = 2\sqrt{3}/3$ en negatief erna binnen 0 < x < 2. De gevonden oppervlakte is dus maximaal.

8. Bepaal het absolute maximum en minimum van $f(x) = x^3 - 3x^2$ op het interval [0, 3].

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \text{ of } x = 2$

Te vergelijken: de kandidaat x = 2 en de randen x = 0 en x = 3.

$f(0) = 0 \;\cdot\; f(2) = -4 \;\cdot\; f(3) = 0$

Minimum −4 bij x = 2; maximum 0, en dat wordt op *beide* randen bereikt. Zonder stap 6 had je het maximum gemist.

9. Waarom mag je bij opgave 3 het kwadraat van de afstand minimaliseren in plaats van de afstand zelf?

Omdat de wortel een stijgende functie is: is d^2 kleiner, dan is d dat ook. Het minimum ligt dus bij dezelfde x.

Je wint er een vervelende afgeleide mee. Let op: dit werkt alleen omdat afstanden niet negatief zijn.

10. Een rechthoekige weide langs een rechte muur wordt met 100 m hek omheind; de muur vormt één zijde. Wat is de grootst mogelijke oppervlakte?

Noem de twee zijden loodrecht op de muur x. Dan is de derde zijde 100 − 2x.

$A(x) = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2, \quad \text{met } 0 < x < 50$

$A'(x) = 100 - 4x = 0 \;\rightarrow\; x = 25$

De weide wordt 25 bij 50 m, met oppervlakte 1250 m^2. Merk op dat het géén vierkant is: de muur telt niet mee in het hek.

Controle: $A' = 100 - 4x$ is positief voor 0 < x < 25 en negatief voor 25 < x < 50. Daarom is 1250 m^2 het maximum.

De afgeleiden van de standaardfuncties

Aanvulling bij deel 1 · extra opgaven 11–15 · maandag 2 november

Deze vijf extra opgaven gebruiken uitsluitend de betekenis van de afgeleide, de constante regel en de machtsregel. Er is geen productregel, kettingregel of afgeleide van e^x, ln(x), sin(x) of cos(x) nodig.

11. Differentieer $f(x) = -4x^5$. Bereken ook de helling bij $x = -1$.

Stap 1. Herken een vaste factor maal een macht. De factor -4 blijft staan.

Stap 2. Vermenigvuldig met exponent 5 en verlaag de exponent met 1: $f'(x) = -4 \cdot 5x^4 = -20x^4$.

Stap 3. Vul $x = -1$ in: $f'(-1) = -20 \cdot (-1)^4 = -20 \cdot 1 = -20$.

Antwoord: $f'(x) = -20x^4$ en de helling bij $x = -1$ is -20.

Valkuil. Let op: $(-1)^4$ is positief. Het minteken vóór de 20 blijft staan.

12. Differentieer $g(x) = 7/x^3$. Geef ook aan voor welke x de afgeleide bestaat.

Stap 1. De noemer mag niet nul zijn. Het domein is dus $x \neq 0$.

Stap 2. Schrijf de breuk als negatieve macht: $g(x) = 7x^{-3}$.

Stap 3. Pas de machtsregel toe: $g'(x) = 7 \cdot (-3)x^{-4} = -21x^{-4}$.

Stap 4. Schrijf terug als breuk: $g'(x) = -21/x^4$.

Antwoord: $g'(x) = -21/x^4$, voor $x \neq 0$.

Valkuil. Let op: de exponent -3 wordt na differentiëren -4. $x = 0$ blijft uitgesloten.

13. Gegeven is $h(x) = 3\sqrt{x}$. Bepaal $h'(x)$ voor $x > 0$ en bereken de helling bij $x = 9$.

Stap 1. Schrijf de wortel als macht: $h(x) = 3x^{1/2}$. De factor 3 blijft staan.

Stap 2. Vermenigvuldig met ½ en verlaag de exponent met 1: $h'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} = 3/2 \cdot x^{-1/2}$.

Stap 3. Schrijf de negatieve exponent als wortel in de noemer: $h'(x) = 3/(2\sqrt{x})$, voor $x > 0$.

Stap 4. Vul $x = 9$ in: $h'(9) = 3/(2 \cdot 3) = 1/2$.

Antwoord: $h'(x) = 3/(2\sqrt{x})$ voor $x > 0$ en $h'(9) = \frac{1}{2}$.

Valkuil. Let op: vergeet de vaste factor 3 niet.

14. De functie $p(x) = -6$ is constant. Bepaal $p'(x)$ en leg met het differentiequotiënt uit waarom.

Stap 1. De functiewaarde verandert niet: $p(x+h) = -6$ en $p(x) = -6$.

Stap 2. Vul in: $[p(x+h) - p(x)]/h = [-6 - (-6)]/h = 0/h = 0$.

Stap 3. De uitkomst is voor iedere $h \neq 0$ al nul. Dus $p'(x) = \lim_{h \to 0} 0 = 0$.

Antwoord: $p'(x) = 0$ voor alle x. De grafiek is een horizontale lijn.

Valkuil. Let op: de functiewaarde is -6; de helling is 0. Dat zijn twee verschillende dingen.

15. Gegeven is $q(x) = x^2$. Gebruik de definitie van de afgeleide om de helling bij $x = 3$ te berekenen.

Stap 1. Schrijf de definitie: $q'(3) = \lim_{h \to 0} [q(3+h) - q(3)]/h$.

Stap 2. Werk uit: $q(3+h) = (3+h)^2 = 9 + 6h + h^2$ en $q(3) = 9$.

Stap 3. Vul in en vereenvoudig: $q'(3) = \lim_{h \to 0} (9 + 6h + h^2 - 9)/h = \lim_{h \to 0} (6h + h^2)/h = \lim_{h \to 0} (6+h)$.

Stap 4. Laat h naar 0 gaan: $q'(3) = 6 + 0 = 6$.

Antwoord: de helling bij $x = 3$ is 6.

Valkuil. Let op: maak h niet meteen nul; vereenvoudig eerst. $q(3) = 9$ is de hoogte, niet de helling.